

# ГЛАВА 6 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## 6.1 Производная функции

**Определение 1.** Производной функции  $f(x)$  в точке  $x$  называется предел отношения приращения функции  $\Delta f(x)$  в этой точке к приращению аргумента  $\Delta x$ , при условии, что  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Обозначение производной функции  $y = f(x)$

$$f'(x), y', \frac{df(x)}{dx}, \frac{dy}{dx}.$$

По определению:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

или

$$y' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad y' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Операцию нахождения производной называют дифференцированием.

### *Основные правила и формулы дифференцирования*

1.	$(u + v - w)' = u' + v' - w'$	
2.	$(uv)' = u'v + v'u$	
3.	$(cu)' = cu'$	$x' = 1$ $c' = 0, \quad c = const$
4.	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	
5.	$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$	

6.	$(u^a)' = au^{a-1} \cdot u'$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
7.	$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}; \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
8.	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
9.	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(e^x)' = e^x$
10.	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
11.	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$
12.	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\sin x)' = \cos x$
13.	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	$(\cos x)' = -\sin x$
14.	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
15.	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
16.	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17.	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
18.	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
19.	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

## Решение типовых примеров

Найти производные от функций:

а) Производные элементарных функций

**Пример 1.**  $y = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 4$

Решение.

$$y' = 15x^2 - 4x + 3$$

**Пример 2.**  $y = 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2}$

Решение. Перепишем заданное выражение, используя дробные и отрицательные показатели:

$$y = 2x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-2}$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + 3 \cdot (-2)x^{-3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3}$$

**Пример 3.**  $y = x^3 \cos x$

Решение. По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$y' = (x^3)' \cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$$

**Пример 4.**  $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}$

Решение. Применим правило дифференцирования дроби:

$$y' = \frac{(\operatorname{arctg} x)' x^3 - \operatorname{arctg} x (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x - 3(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x^4(1+x^2)}$$

б) Производные сложных функций

**Пример 5.**  $y = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$ .

Решение. Вводим вспомогательную функцию  $u = x^2 + 3x + 1$ , тогда можно записать  $y = \sqrt{u}$ , зная, что:

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u', \text{ получим } y' = \frac{(x^2 + 3x + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}} = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$$

**Пример 6.**  $y = (x^2 + 5x + 7)^8$

Решение. Пусть  $u = x^2 + 5x + 7$ , тогда  $y = u^8$ ,  $y' = 8u^7 \cdot u'$

$$u' = 2x + 5$$

$$y' = 8(x^2 + 5x + 7)^7 (2x + 5)$$

### **Задания для решения в аудитории**

Найти производную заданной функции:

1.  $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$

2.  $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$

3.  $y = x^2 \operatorname{ctgx}$

4.  $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

5.  $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

6.  $y = \ln(x^3 + 7x + 2)$

7.  $y = \ln(\operatorname{arctgx})$

8.  $y = e^{\operatorname{arcsin} x}$

9.  $y = \sin^3 x$

10.  $y = \sqrt{1 - x^2} \operatorname{arcsin} x$

## **6.2 Производные высших порядков**

Производной второго порядка (второй производной) от функции  $y = f(x)$  называется производная от её производной  $y' = f'(x)$ , то есть:

$$y'' = [f'(x)]'$$

Производной  $n$ -го порядка от функции  $y = f(x)$  называется производная от её  $(n-1)$ -ой производной:

$$y^{(n)} = [f^{(n-1)}(x)]'$$

Обозначения  $y''$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ;  $y^{(n)}$ ;  $\frac{d^n y}{dx^n}$

### *Решение типовых примеров*

**Пример 1.** Найти производную 2-го порядка от функции  $y = \sin^2 x$ .

Решение.

$$y' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x \quad y'' = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x$$

**Пример 2.** Найти производную третьего порядка функции  $y = x \ln 2x$ .

Решение.

Продифференцируем эту функцию трижды:

$$y' = \ln 2x + x \cdot \frac{2}{2x} = \ln 2x + 1;$$

$$y'' = (\ln 2x + 1)' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x};$$

$$y''' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Итак, } (x \ln 2x)''' = -\frac{1}{x^2}.$$

### *Задания для решения в аудитории*

Найти производную 2-го порядка от функции

1)  $y = \sin^2 x$

$$2) y = \frac{1}{1+2x}$$

$$3) y = e^{x^2}$$

$$4) y = \sqrt{x^2 + 1}$$